

2.1 MODELOS DE LA MÁQUINA SÍNCRONA

El generador síncrono es un elemento básico en el comportamiento de un sistema eléctrico. Las oscilaciones de potencia en líneas de transmisión y los cambios de frecuencia y voltaje en condiciones de disturbio, dependen de la configuración de la red y la reacción de los generadores y sus controles.

En estudios de estabilidad transitoria y dinámica es necesario utilizar una representación adecuada del generador síncrono. Se requiere un modelo comprensible, de fácil implementación en computadora digital y que a la vez sea compatible con los modelos de controles y elementos en el sistema.

En particular, dadas las características del problema de estabilidad dinámica se requiere además que el modelo del generador sea linealizado para una condición de operación específica.

En esta sección se describen seis modelos de máquinas síncronas. Inicialmente se plantea un modelo general, basado en las ecuaciones de Park. Se incluyen las consideraciones que deben de cumplir los modelos, se resumen las características de cada uno basados en el número de devanados presentes en el rotor. Se describen en detalle la derivación de dos de ellos, para el resto se presenta de manera sencilla las ecuaciones en los modelos computacionales.

También se incluye la derivación del modelo linealizado del generador, en configuración maquina-barra-bus infinito, y se muestra un ejemplo de cálculo de constantes de la máquina para una condición dada.

2.2. MODELO GENERAL

La figura 2.1 muestra una representación esquemática de la máquina síncrona, en ella se indican las convenciones que se adoptan en cuanto a la posición de los ejes del rotor y a la dirección de las corrientes. Se ha considerado al eje directo (d) 90° adelante del eje en cuadratura (q) y la máquina se modela como generador. Se tienen tres devanados sobre el estator; uno por cada fase y cuatro sobre el rotor: circuito de campo (f), devanados amortiguadores sobre los ejes directo y en cuadratura. (k_d , k_q) y el devanado que representa las corrientes de Eddy en el rotor (g).

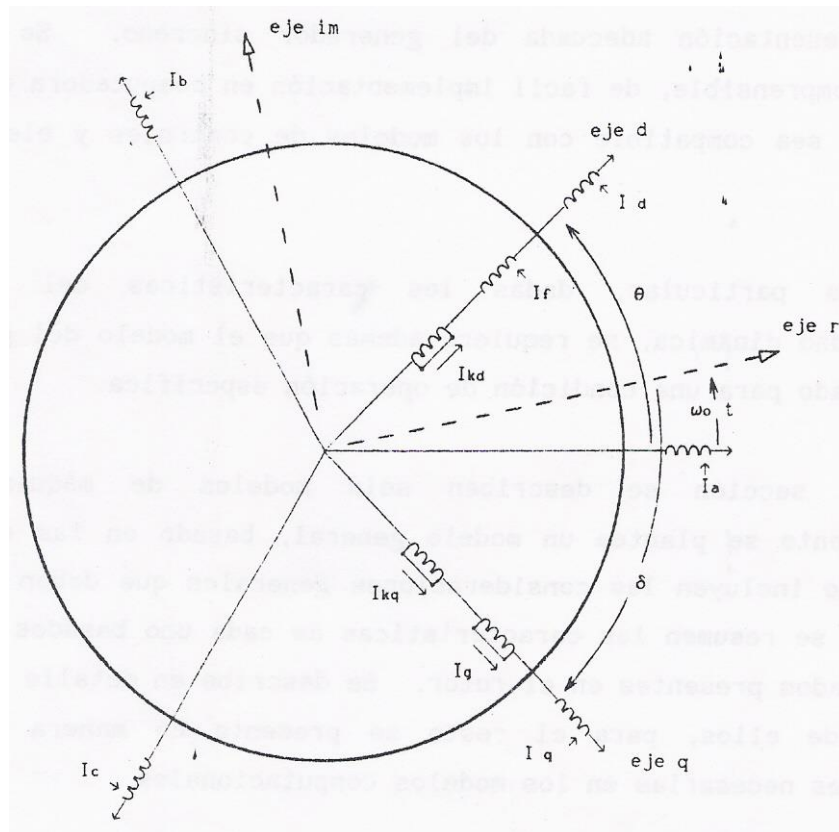


Figura 2.1 Diagrama esquemático del generador síncrono.

El comportamiento de las variables eléctricas del generador queda definido por las ecuaciones de voltaje y encadenamientos de flujo que relacionan los devanados. Las ecuaciones de voltaje de los devanados de estator, con referencia a las fases (a, b, c), se expresan en función de

inductancias que varían con la posición del rotor. Cambiando la referencia de las ecuaciones del estator, fases (a, b, c), a los ejes (d, q, 0) del rotor, se logra expresar estas ecuaciones en función de las inductancias invariantes en el tiempo.

En la figura 2.1 los devanados más externos sobre los ejes d, q del rotor representan los devanados referidos al rotor. La transformación de coordenadas se realiza por medio de la transformación de Park, con lo que se pasa del marco de referencia (a, b, c), estático y variante con el tiempo, al marco de referencia (d, q, 0) giratorio e invariante con el tiempo.

Por otro lado, el cambio de referencia provoca inductancias mutuas diferentes entre circuitos de rotor y estator. Si se selecciona un sistema por unidad adecuado para expresar las ecuaciones y variables del generador se logra obtener inductancias mutuas iguales. Además en las ecuaciones de voltaje de estator aparecen los llamados “Voltajes de velocidad” ($\omega \Psi_d$, $\omega \Psi_q$) como resultado del cambio de referencia. Suponiendo condiciones estáticas y dinámicas balanceadas, las ecuaciones de voltaje y encadenamientos de flujo en los ejes d, q son:

$$V_d = -r I_d - \frac{d \Psi_d}{dt} - \omega \Psi_q \quad (2.1)$$

$$V_q = -r I_q - \frac{d \Psi_q}{dt} - \omega \Psi_d \quad (2.2)$$

$$V_f = -r_f I_f - \frac{d \Psi_f}{dt} \quad (2.3)$$

$$0 = -r_g I_g - \frac{d \Psi_g}{dt} \quad (2.4)$$

$$0 = -r_{fd} I_{kd} - \frac{d \Psi_{kd}}{dt} \quad (2.5)$$

$$0 = -r_{qd} I_{kq} - \frac{d \Psi_{kq}}{dt} \quad (2.6)$$

$$\Psi_d = L_d I_d + L_{md} I_f + L_{md} I_{kd} \quad (2.7)$$

$$\Psi_q = L_q I_q - L_{mq} I_g - L_{mq} I_{kq} \quad (2.8)$$

$$\Psi_f = L_{md} I_d + L_f I_f + L_{md} I_{kd} \quad (2.9)$$

$$\Psi_g = -L_{mq} I_q + L_g I_g - L_{mq} I_{kq} \quad (2.10)$$

$$\Psi_{kd} = L_{md} I_d + L_{md} I_f + L_{kd} I_{kd} \quad (2.11)$$

$$\Psi_{kq} = -L_{mq} I_q - L_{mq} I_g + L_{kq} I_{kq} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones de potencia activa y reactiva, la ecuación del par eléctrico, y la ecuación de oscilación completan el modelo matemático.

$$P = V_d I_d + V_q I_q \quad (2.13)$$

$$Q = V_d I_q - V_q I_d \quad (2.14)$$

$$T_e = (L_d - L_q) I_d I_q + L_{md} I_f I_q + L_{md} I_{kd} I_q + L_{mq} I_{kq} I_d + L_{mq} I_g I_d \quad (2.15)$$

$$\frac{2H}{\omega_o} \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m - T_e \quad (2.16)$$

2.3 CONSIDERACIONES GENERALES PARA SIMULACIÓN

El comportamiento del generador se determina por el sistema de ecuaciones (2.1.) – (2.16); de aquí que una alternativa de solución al problema dinámico sea resolver directamente este conjunto de ecuaciones.

En el se conocen o es posible determinar, el valor de los parámetros, (inercia (H), resistencias e inductancias), a partir de datos de fábrica o de pruebas).

Sin embargo, la utilización de las ecuaciones (2.1.) - (2.16) para la solución del problema de estabilidad en sistemas de potencia se enfrenta al problema que planea la inclusión de los términos $d\Psi_d/dt$ y $d\Psi_q/dt$ en las ecuaciones de voltaje del estator. La eliminación de esos términos de voltaje equivale a despreciar los fenómenos transitorios en el estator. En el estudio de estabilidad es práctica común eliminar los términos $d\Psi_d/dt$ y $d\Psi_q/dt$ para lograr una

simplificación en el análisis, considerando que su influencia es relativamente pequeña en los tiempos de interés.

La implementación de la solución digital de las ecuaciones básicas requiere de ciertas adecuaciones y manipulaciones algebraicas. Para esto se deben de tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

a) Se representan solo voltajes y corrientes de frecuencia fundamental, tanto en el estator como en el sistema de potencia. Se desprecian, por lo tanto, las componentes armónicas de voltaje y corriente, así como la componente de corriente directa en las corrientes del estator. Esto permite que todos los voltajes y corrientes del generador y del sistema puedan ser representados por medio de fasores. Las ecuaciones del SEP se manejan algebraicamente en el plano complejo y los fasores de la máquina se describen por medio de ecuaciones diferenciales y algebraicas.

b) Se utilizan componentes simétricas para representar condiciones de operación desbalanceadas. Esto resulta en la reducción de la forma fasorial de la máquina a su circuito de secuencia positiva.

2.4 MODELOS DERIVADOS

A partir de las ecuaciones básicas y con algunas consideraciones basadas en el número de devanados en el rotor, en los encadenamientos de flujo del campo y el devanado g, se derivan seis modelos de los generadores adecuados para la simulación digital. La tabla 2.1 muestra en forma resumida las consideraciones efectuadas y los modelos resultantes.

Tabla 2.1 Características de los modelos derivados

MODELO	DEVANADOS CONSIDERADOS					
	Ψ_f	Ψ_g	F	g	kd	kq
I	Cte.	Cte	SI	SI	NO	NO
II	Cte.	0	SI	NO	NO	NO
III	Var.	0	SI	NO	NO	NO
IV	Var.	Var.	SI	SI	NO	NO
V	Var.	0	SI	NO	SI	SI
VI	Var.	Var.	SI	SI	SI	SI

Los modelos I, IV y VI corresponden a generadores de polos lisos, adecuados para representar turbogeneradores. Los modelos II, III y V se emplean en la simulación del comportamiento de generadores de polos salientes.

En los modelos simplificados (I y II) se obtienen como salidas las potencias activa y reactiva, el voltaje en terminales, la velocidad angular y la diferencia angular entre rotores. Estas variables se obtienen también de los modelos restantes, pero en forma adicional es posible extraer de ellos el comportamiento de otras variables. En la tabla 2.2. Se indican las variables adicionales disponibles para los modelos III y VI.

Tabla 2.2. Variables Adicionales para cada modelo

MODELOS	VARIABLES DISPONIBLES							
	I_f	I_g	I_{kd}	I_{kq}	E_{fd}	E'	E''	T_e
III	SI	NO	NO	NO	SI	SI	NO	SI
IV	SI	SI	NO	NO	SI	SI	NO	SI
V	SI	NO	SI	SI	NO	NO	SI	SI
VI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI

La nomenclatura utilizada para las variables de la tabla 2.2 es la siguiente:

- I_f Corriente de campo.
- I_g Corriente de Eddy, en el eje en cuadratura.
- I_{kd} Corriente en el devanado amortiguador en el eje en directo.
- I_{kq} Corriente en el devanado amortiguador en el eje en cuadratura.
- E_{fd} Voltaje interno proporcional al voltaje de campo.
- E' Voltaje interno transitorio.
- E'' Voltaje interno subtransitorio.
- T_e Par eléctrico.

2.4.1 Ejes De Referencia

La relación entre variables fasoriales expresadas con respecto a la referencia del rotor de cada máquina (q, d) y la referencia sincronía única del sistema (R, IM) se da a través de una matriz de transformación de coordenadas. Para el caso de corrientes se tiene:

$$I(R, IM) = [A] I_{(q,d)}$$

$$\begin{bmatrix} I_R \\ I_{IM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q \\ I_d \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

En la forma compleja se escribe la relación inversa como:

$$I_q + j I_d = (I_R + j I_{IM}) e^{-j\delta} = I e^{-j\delta} \quad (2.18)$$

Estas relaciones se cumplen igualmente para voltajes.

2.4.2 Derivación Detallada del Modelo IV.

En este modelo se desprecian los efectos de los devanados amortiguadores en comportamiento del generador. Esto se realiza eliminando esos circuitos del modelo completo. En las ecuaciones (2.2)- (2.12) y (2.15) se hacen cero las corrientes y encadenamientos de flujo en los devanados kd y kq, con lo que el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$V_d = -r I_d - \frac{d\Psi_d}{dt} - \omega \Psi_q \quad (2.19)$$

$$V_q = -r I_q - \frac{d\Psi_q}{dt} - \omega \Psi_d \quad (2.20)$$

$$V_f = -r_f I_f - \frac{d\Psi_f}{dt} \quad (2.21)$$

$$0 = -r_g I_g - \frac{d\Psi_g}{dt} \quad (2.22)$$

$$\Psi_d = L_d I_d + L_{md} I_f \quad (2.23)$$

$$\Psi_q = L_q I_q - L_{mq} I_g \quad (2.24)$$

$$\Psi_f = L_{md} I_d + L_f I_f \quad (2.25)$$

$$\Psi_g = -L_{mq} I_q + L_g I_g \quad (2.26)$$

$$T_e = (L_d - L_q) I_d I_q + L_{md} I_f I_q + L_{mq} I_g I_d \quad (2.27)$$

Las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.16) no se modifican.

El objetivo es expresar las ecuaciones de voltaje de estator en función de todos los encadenamientos de flujo y de las corrientes de estator.

De (2.25) se tiene que:

$$I_f = \frac{1}{L_f} (\Psi_f - L_{md} I_d) \quad (2.28)$$

Sustituyendo (2.28) en (2.23)

$$\Psi_d = \left(L_d - \frac{L_{md}^2}{L_f} \right) I_d + \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f$$

Y definiendo;

$$L'_d = L_d - \frac{L_{md}^2}{L_f}$$

Se obtiene:

$$\Psi_d = L'_d I_d + \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.29) en (2.20):

$$V_q = -r I_q + \omega L'_d I_d + \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f$$

Se define la reactancia transitoria (X'_d) y una variable proporcional a los encadenamientos de flujo del campo (E'_q), referida al estator como sigue:

$$X'_d = \omega L'_d$$

$$E'_q = \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \quad (2.30)$$

Resultando:

$$V_q = -r I_q + X'_d I_d + E'_q \quad (2.31)$$

Las variables relacionadas por medio de (2.31) son voltajes. V_q es una componente del voltaje de estator, mientras que E'_q es un voltaje interno del generador referido al estator

Por otro lado, si en la ecuación (2.2.1)

$$\frac{d\Psi_f}{dt} = -V_f - r_f I_f \quad (2.32)$$

Se sustituye (2.28), se obtiene

$$\frac{d\Psi_f}{dt} = -V_f - \frac{r_f}{L_f} (\Psi_f - L_{md} I_d) \quad (2.33)$$

Que representa la dinámica de los encadenamientos de flujo del campo.

Para referir la ecuación (2.33) al estator se multiplica por $\omega (L_{md}/L_f)$

$$\frac{d}{dt} \left(\omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \right) = - \frac{r_f}{L_f} \left(\omega \frac{L_{md}}{r_f} V_f + \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f - \omega \frac{L_{md}^2}{L_f} I_d \right) \quad (2.32)$$

Aquí se define una segunda variable, proporcional a la corriente de campo en estado estable, con referencia al estator:

$$\omega \frac{L_{md}}{r_f} V_f = E_{fd} \quad (2.34)$$

Se utiliza también la convención de escribir las relaciones inductancia-resistencia como constantes de tiempo.

$$T'_{do} = \frac{L_f}{r_f} \quad (2.35)$$

Utilizando la relación entre reactancias en el eje directo

$$\omega \frac{L_{md}^2}{L_f} = X_d - X'_d$$

Se obtiene

$$\frac{d}{dt} E'_q = - \frac{1}{T'_{do}} [E'_{fd} + E'_q - (X_d - X'_d) I_d] \quad (2.36)$$

Así (2.36), define los cambios en el tiempo de los encadenamientos de flujo del campo.

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, partiendo de las ecuaciones (2.19),(2.24) y (2.26) se obtiene la ecuación que define la dinámica de los encadenamientos de flujo del devanado g:

$$\frac{d E'_d}{dt} = - \frac{1}{T'_{qo}} (E'_d + (X_q - X'_q) I_q) \quad (2.37)$$

Donde el voltaje interno transitorio sobre el eje directo se define como una variable proporcional a los encadenamientos de flujo del devanado g:

$$E'_d = \omega \frac{L_{mq}}{L_g} \Psi_g \quad (2.38)$$

Despejando la corriente I_g de la ecuación (2.26) y sustituyéndola en (2.24) se obtiene:

$$\Psi_q = - \frac{L_{mq}}{L_g} \Psi_g + L'_q I_q \quad (2.39)$$

Donde:

$$L'_q = L_q - \frac{L_{mq}^2}{L_g}$$

Utilizando (2.39) en (2.19)

$$V_d = - r I_d + \omega L'_q I_q + \omega \frac{L_{mq}}{L_g} \Psi_g$$

Y definiendo la reactancia transitoria (X'_q):

$$\omega L'_q = X'_q$$

se obtiene finalmente

$$V_d = - r I_d - X'_q I_q + E'_d \quad (2.40)$$

La solución de las ecuaciones del generador se debe realizar en forma simultánea con las ecuaciones de la red a que se conecta; para esto, es necesario relacionar ambos conjuntos de ecuaciones a través de las variables de estado del estator. Las ecuaciones de voltaje (2.31) y (2.40), sirven para este propósito. Escribiendo ambas en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_q \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & X'_d \\ -X'_q & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q \\ I_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E'_q \\ E'_d \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Utilizando la matriz A para cambiar de la referencia en los ejes d, q de la máquina de referencia síncrona única del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$$

De esta manera se obtiene la forma compleja de la inyección de corriente del generador al sistema:

$$\begin{aligned} (I_r + j I_{IM}) = & \frac{r - j \frac{1}{2} (X'_d + X'_q)}{k} E' - j \frac{1}{2} \frac{(X'_q - X'_d)}{k} (E'^* - V^*) e^{j2\delta} \\ & + j \frac{1}{2} \frac{(X'_q - X'_d)}{k} (E'^* - V^*) e^{j2\delta} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Donde:

$$k = r^2 + X'_d X'_q$$

La ecuación (2.42) se representa por el circuito equivalente de la figura 2.2, donde:

$$Y_{fic} = \frac{r - j \frac{1}{2} (X'_d + X'_q)}{k} \quad (2.37)$$

$$I_{saliencia} = j \frac{1}{2} \frac{(X'_q - X'_d)}{k} (E'^* - V^*) e^{j2\delta}$$

$$I_{ficticia} = Y_{fic} E' + I_{saliencia}$$

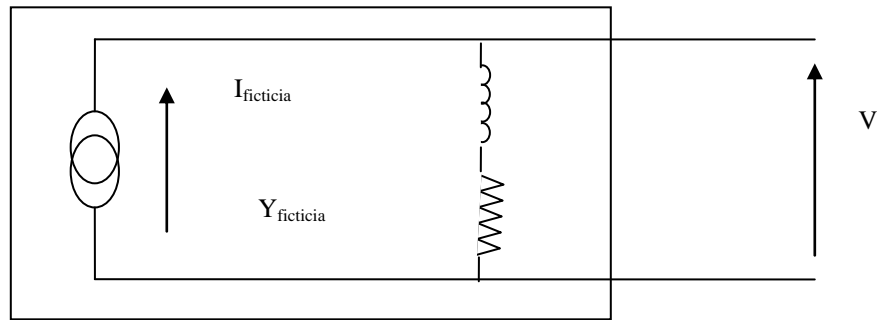


Figura. 2.2 Circuito equivalente del generador

2.4.3. Resumen de Modelos

A continuación se presenta un resumen de las ecuaciones necesarias para aplicar los modelos I y IV, incluyendo, las consideraciones adicionales pertinentes.

2.4.3.1. Modelo I. Modelo Simplificado Rotor Sólido

En forma adicional al las consideraciones para la derivación de las ecuaciones del modelo IV, en este caso se supone que:

1) Los encadenamientos de flujo del campo y del devanado “g” permanecen constantes en magnitud.

$$\Psi_f = \text{cte.} \quad \Psi_g = \text{cte.}$$

Por lo tanto:

$$E'_q = \text{cte.} \quad E'_d = \text{cte.}$$

2) Se desprecia la saliencia transitoria

$$X'_q = X'_d$$

Este modelo es la representación clásica de la máquina para estudios de estabilidad transitoria.

En particular para máquinas de polos lisos.

La ecuación de oscilación, (2.16), se desarrolla para obtener la posición y velocidad angular, como:

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} = T_m - T_e$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \quad (2.44)$$

De las ecuaciones 2.31 y 2.40, aplicando suposición (2)

$$E' = V_t + (R_a + j X'_d) I_t \quad (2.45)$$

2.4.3.2. Modelo II. Modelo simplificado Rotor Laminado

En este caso, además de las consideraciones del modelo IV se supone que:

1) Los encadenamientos de flujo del campo permanecen constantes y los del devanado “g” se deprecian.

$$\Psi_f = \text{cte.} \quad \Psi_g = 0$$

Por lo tanto:

$$E'_q = \text{cte.} \quad E'_d = 0$$

2) Se desprecian las corrientes de Eddy. (Se hace cero la corriente en el devanado g).

$$I_g = 0$$

Por lo cual:

$$X'_q = X_q$$

Este modelo simplificado es aplicable a máquinas de polos salientes.

Para la localización del eje q, en estado estable se utiliza;

$$E_q = V_t (R_a + j X_q) I_t \quad (2.46)$$

La magnitud constante de E'_q se obtiene de (2.3.1) y (2.46) como:

$$|E'_q| = \text{ABS} \{ E_q \} + (X_q - X'_d) I_d \quad (2.47)$$

Los voltajes terminales en el transitorio se obtiene de (2.41) y de la suposición (1)

$$\begin{bmatrix} V_q \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & X'_d \\ -X'_q & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q \\ I_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E'_q \\ E'_d = 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

2.4.3.3 Modelo III. Máquina con Rotor Laminado, sin efectos subtransitorios

La única consideración adicional para la derivación de las ecuaciones de este modelo es la siguiente:

1) Se desprecian las corrientes de Eddy, (Se hace cero la corriente en el devanado g)

$$I_g = 0$$

Esto es:

$$X'_q = X_q$$

Este es el modelo más sencillo por medio del cual es posible incluir el efecto del sistema de excitación sobre la estabilidad de la máquina. En particular se aplica para el caso de las máquinas de rotor laminado o polos salientes

Las ecuaciones a resolver, además de la de oscilación son las siguientes:

Aplicando la suposición (1) se modifica la ecuación (2.37), resultando:

$$\frac{dE'_d}{dt} = 0 \tag{2.49}$$

La variación del voltaje interno transitorio E'_q se obtiene resolviendo (2.36)

$$\frac{d}{dt} E'_q = - \frac{1}{T'_{do}} [E_{fd} + E'_q - (X_d - X'_d) I_d] \tag{2.36}$$

La inyección del generador a la red se obtiene resolviendo (2.42)

2.4.3.4. Modelo IV. Máquina de Rotor Sólido, sin efectos subtransitorios.

Las ecuaciones a resolver para la máquina representada a través del modelo IV son:

Ecuación de oscilación (2.16) o (2.43) y (2.44)

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e \tag{2.43}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \quad (2.44)$$

Ecuaciones de voltaje internos transitorios: E'_q (2.36) y E'_d (2.37)

$$\frac{d}{dt} E'_q = - \frac{1}{T'_{do}} [E'_{fd} + E'_q - (X_d - X'_d) I_d] \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} E'_d = - \frac{1}{T'_{qo}} [E'_d + (X_q - X'_q) I_q] \quad (2.37)$$

Ecuación de inyección de corriente a la red: $I_r + j I_{im}$ (2.42)

$$(I_r + j I_{IM}) = \frac{r - j \frac{1}{2} (X'_d + X'_q)}{k} E' - j \frac{1}{2} \frac{(X'_q - X'_d)}{k} \quad (2.42)$$

$$(E'^* - V^*) e^{j2\delta} = \frac{r - j \frac{1}{2} (X'_d + X'_q)}{k} V$$

2.4.4. Derivación detallada del Modelo VI

La derivación del modelo se realiza a partir del sistema de ecuaciones (2.1) – (2.16). Se incluyen los devanados amortiguadores y se consideran las suposiciones dadas en la sección 2.3.

Para obtener expresiones de los voltajes de estator V_d y V_q en función de los encadenamientos de flujo se sigue un proceso de sustitución. Para las variables localizadas sobre el eje directo, se inicia con la ecuación de corriente de campo. De (2.9) se tiene:

$$I_f = \frac{1}{L_f} (\Psi_f - L_{md} I_d - L_{kd} I_{kd}) \quad (2.50)$$

Sustituyendo en (2.11):

$$\Psi_{kd} = (L_{md} - \frac{L_{md}^2}{L_f}) I_d + (L_{kd} - \frac{L_{md}^2}{L_f}) I_{kfd} + \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f$$

$$\Psi_{kd} = L'_{md} I_d + L'_{kd} I_{kd} + \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \quad (2.51)$$

Despejando I_{kd}

$$I_{kd} = \frac{1}{L'_{kd}} \left(\Psi_{kd} - L'_{md} I_d - \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \right)$$

Sustituyendo (2.50) en (2.7)

$$\Psi_d = \left(L_d - \frac{L_{md}^2}{L_f} \right) I_d + \left(L_{md} - \frac{L_{md}^2}{L_f} \right) I_{kd} + \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f$$

$$\Psi_d = L'_d I_d + L'_{md} I_{kd} + \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \quad (2.52)$$

Sustituyendo (2.51) en (2.52):

$$\Psi_d = \left(L'_d - \frac{L_{md}^2}{L'_{kd}} \right) I_d + \frac{L_{md}}{L_f} \left(1 - \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \right) \Psi_f + \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \Psi_{kd}$$

$$\Psi_d = L''_d I_d + \frac{L_{md}}{L_f} \left(1 - \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \right) \Psi_f + \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \Psi_{kd} \quad (2.53)$$

Sustituyendo (2.53) en 2.2. se obtiene la componente en el eje q del voltaje terminal:

$$V_q = -r I_q + \omega L''_q I_d + \omega \frac{L_{md}}{L_f} \left(1 - \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \right) \Psi_f + \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \Psi_{kd}$$

Si se definen:

$$E''_q = \omega \left\{ \frac{L_{md}}{L_f} \left(1 - \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \right) \Psi_f + \frac{L'_{md}}{L'_{kd}} \Psi_{kd} \right\} \quad (2.54)$$

y;

$$X''_d = \omega L''_d$$

Entonces resulta la expresión más comúnmente usada:

$$V_q = -r I_q + X''_d I_d + E''_q \quad (2.55)$$

Por un procedimiento análogo, se llega a expresar la componente del voltaje de estator sobre el eje d como:

$$V_d = -r I_d - \omega L''_q I_q + \omega \left\{ \frac{L_{mq}}{L_g} \left(1 + \frac{L'_{mq}}{L'_{kq}} \right) \Psi_g + \frac{L'_{mq}}{L'_{kq}} \right\} \Psi_{kq}$$

Donde se definen:

$$E''_d = \omega \left\{ \frac{L_{mq}}{L_g} \left(1 + \frac{L'_{mq}}{L'_{kq}} \right) \Psi_g + \frac{L'_{mq}}{L'_{kq}} \Psi_{kq} \right\} \quad (2.56)$$

y;

$$X''_q = \omega L''_q$$

Para obtener finalmente:

$$V_d = -r I_d - X''_q I_q + E''_d \quad (2.57)$$

Las expresiones (2.54) y (2.56) se conocen como voltajes subtransitorios. Dependen de los encadenamientos de flujo de los devanados del rotor y la velocidad angular, e incluyen los efectos de los devanados amortiguadores. Las ecuaciones (2.55) y (2.57) relacionan estos voltajes internos, referidos al estator, con el voltaje en terminales del generador a través de las reactancias subtransitorias. Los cambios en los encadenamientos de flujo se expresan en función de corrientes de estator, voltaje de campo y los mismos encajamientos.

Para la dinámica de la corriente de campo, se tiene de la ecuación (2.3).

$$\frac{d\Psi_f}{dt} = -V_f - r_f I_f \quad (2.58)$$

Sustituyendo (2.51) en (2.10);

$$I_f = \frac{1}{L_f} \left\{ \left(1 + \frac{L_{md}^2}{L_f L'_{kd}} \right) \Psi_f + L_{md} \left(\frac{L'_{md}}{L'_{kd}} - 1 \right) I_d \frac{L_{md}}{L'_{kd}} \right\} \Psi_{kd}$$

Sustituyendo esta ecuación en (2.58):

$$\frac{d\Psi_f}{dt} = -V_f - \frac{1}{T'_{do}} \left\{ \left(1 + \frac{L_{md}^2}{L_f L'_{kd}} \right) \Psi_f \right.$$

$$L_{md} \left(\frac{L'_{md}}{L'_{kd}} - 1 \right) I_d - \frac{L_{md}}{L'_{kd}} \Psi_{kd} \left. \vphantom{\frac{L'_{md}}{L'_{kd}}} \right\} \quad (2.59)$$

Las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento en el tiempo de los encadenamientos de flujo para los tres devanados de rotor restantes, se derivan de manera similar. Las expresiones finales son:

$$\frac{d \Psi_{kd}}{dt} = - \frac{1}{T''_{do}} \left(\Psi_{kd} - L'_{md} I_d - \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \right) \quad (2.60)$$

$$\frac{d \Psi_g}{dt} = - \frac{1}{T'_{do}} \left\{ \left(1 + \frac{L^2_{md}}{L_g L'_{kq}} \right) \Psi_g + L_{mq} \left(1 + \frac{L'_{mq}}{L'_{kq}} \right) I_d + \frac{L_{mq}}{L'_{kq}} \Psi_{kq} \right\} \quad (2.61)$$

$$\frac{d \Psi_{kq}}{dt} = - \frac{1}{T''_{do}} \left(\Psi_{kq} - L'_{mq} I_q - \frac{L_{mq}}{L_q} \Psi_g \right) \quad (2.62)$$

En caso de ocurrir una perturbación externa al generador, las corrientes de estator I_d e I_q se alteran y modifican a los encadenamientos de flujo de acuerdo a las ecuaciones (2.59) – (2.62). Al resolver este sistema de cuatro ecuaciones diferenciales se pueden sustituir los nuevos valores de Ψ_f , Ψ_{kd} , Ψ_g y Ψ_{kq} en las ecuaciones (2.54) y (2.56) para conocer los cambios en los voltajes subtransitorios, que son la respuesta de la máquina ante el evento.

La forma compleja de la inyección de corriente del generador, se obtiene de manera similar que para el modelo IV, y resulta:

$$(I_r + j I_M) = \frac{r - j \frac{1}{2} (X''_d + X''_q)}{k} E' - j \frac{1}{2} \frac{(X''_q - X''_d)}{k} (E'^* - V^*) e^{j2\delta}$$

$$- \frac{r - j \frac{1}{2} (X''_d + X''_q)}{k} V \quad (2.63)$$

Donde:

$$k = r^2 + X''_d X''_q$$

2.4.5 RESUMEN DE MODELOS

2.4.5.1 Modelo V. Máquina Con Rotor Laminado, incluyendo Efectos Subtransitorios

En este modelo se consideran cero las corrientes de Eddy del rotor, o sea las del devanado g, por lo que se modifican las ecuaciones (2.61), (2.62) y (2.56), resultando:

$$\frac{d \Psi_g}{dt} = 0 \quad (2.64)$$

$$\frac{d \Psi_{kq}}{dt} = - \frac{1}{T''_{qo}} (\Psi_{kq} + L_{mq} I_q) \quad (2.65)$$

$$E''_d = \omega \frac{L_{mq}}{L_{kq}} \Psi_{kq} \quad (2.66)$$

El resto de las ecuaciones de este modelo no se modifican y son iguales a las del modelo IV

2.4.5.2. Modelo VI. Máquina Con Rotor Sólido, incluyendo Efectos Subtransitorios

Las ecuaciones a resolver para la máquina representada son:

Ecuaciones de encadenamiento de flujos: Ψ_f (2.59), Ψ_{kd} (2.60), Ψ_g (2.61) y Ψ_{kq} (2.62).

Ecuaciones de voltaje internos subtransitorios: E''_q (2.54) y E''_d (2.56).

Ecuaciones de inyección de corriente a la red: $I_r + j I_{im}$ (2.63).

Ecuaciones de oscilación: ω, δ (2.16).

2.5 MODELO LINEALIZADO

En el desarrollo siguiente se utilizan las ecuaciones del modelo III de la máquina, y además se considera despreciable la resistencia de armadura.

2.5.1 Ecuaciones del Par Electromagnético

Se parte de la ecuación (2.67):

$$T_e = V_d I_d + V_q I_q \quad (2.67)$$

Donde, de (2.41)

$$V_d = -X_q I_q$$

$$V_q = E'_q + X'_d I_d$$

Sustituyendo en (2.67) se obtiene

$$T_e = -X_q I_q I_d + (E'_q + X'_d I_d) I_q$$

$$T_e = [E'_q - (X_q - X'_d) I_d] I_q \quad (2.68)$$

Linealizando (2.68) resulta la expresión;

$$\Delta T_e = I_{q0} \Delta E'_q + E'_{q0} \Delta I_q - (X_q - X'_d) I_{d0} \Delta I_q - (X_q - X'_d) I_{q0} \Delta I_d \quad (2.69)$$

2.5.2 Ecuaciones de la Máquina

Para el modelo III, despreciando la resistencia de armadura, se tiene de (2.41)

$$\begin{bmatrix} V_q \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X'_d \\ -X'_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q \\ I_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E'_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

La que se linealiza directamente, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_q \\ \Delta V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X'_d \\ -X'_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_q \\ \Delta I_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta E'_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

2.5.3 Ecuaciones Del Sistema Externo

Se considera un sistema máquina – barra infinita, como el mostrado en la Figura 2.3.

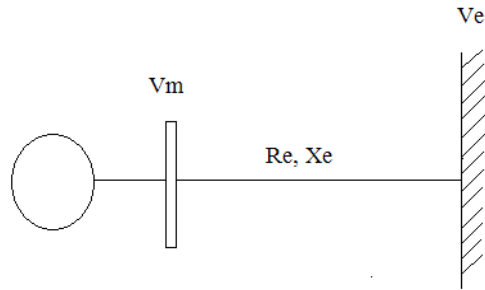


Figura. 2.3 Sistema Elemental Máquina – Barra Infinita

EL voltaje terminal de la máquina en la referencia del sistema es:

$$\begin{aligned}
 V_M &= (R_e + j X_e) I_M + V_e \\
 V_M &= (R_e + j X_e) (I_M + j I_M) + V_e + j V_e \\
 V_M + j V_M &= R_e I_M - X_e I_M + V_e + j (X_e I_M + R_e I_M + V_e)
 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} r \\ V_M \\ i \\ V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & -X_e \\ X_e & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ I_M \\ i \\ I_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ V_e \\ i \\ V_e \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Cambiando la referencia de la ecuación (2.72) a los ejes (q,d):

$$\begin{bmatrix} M \\ V_q \\ M \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_e & -X_e \\ X_e & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ I_q \\ M \\ I_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ V_e \\ i \\ V_e \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Y considerando que:

$$\overset{r}{V_e} = |V_e| \cos \alpha \quad \text{y} \quad \overset{i}{V_e} = |V_e| \sin \alpha$$

La ecuación matricial se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \overset{M}{V_q} \\ \overset{M}{V_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{R_e}{R_e} & -\overset{X_e}{X_e} \\ \overset{X_e}{X_e} & \overset{R_e}{R_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{M}{I_q} \\ \overset{M}{I_d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |V_e| \cos(\delta - \alpha) \\ -|V_e| \sin(\delta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Linealizando se tiene:

$$\begin{bmatrix} \overset{M}{\Delta V_q} \\ \overset{M}{\Delta V_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{R_e}{R_e} & -\overset{X_e}{X_e} \\ \overset{X_e}{X_e} & \overset{R_e}{R_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{M}{\Delta I_q} \\ \overset{M}{\Delta I_d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -|V_e| \sin(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \\ -|V_e| \cos(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Igualando las expresiones para el sistema (2.75) y la máquina (2.71):

$$\begin{bmatrix} 0 & \overset{X'_d}{X'_d} \\ -\overset{X'_q}{X'_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\Delta I_q}{\Delta I_q} \\ \overset{\Delta I_d}{\Delta I_d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\Delta E'_q}{\Delta E'_q} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{R_e}{R_e} & -\overset{X_e}{X_e} \\ \overset{X_e}{X_e} & \overset{R_e}{R_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\Delta I_q}{\Delta I_q} \\ \overset{\Delta I_d}{\Delta I_d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -|V_e| \sin(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \\ -|V_e| \cos(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \end{bmatrix}$$

Se despejan las corrientes:

$$\begin{bmatrix} \overset{\Delta I_q}{\Delta I_q} \\ \overset{\Delta I_d}{\Delta I_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{R_e}{R_e} & -(\overset{X'_d}{X'_d} + \overset{X_e}{X_e}) \\ (\overset{X_q}{X_q} + \overset{X_e}{X_e}) & \overset{R_e}{R_e} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\Delta E'_q}{\Delta E'_q} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -|V_e| \sin(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \\ -|V_e| \cos(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \end{bmatrix} \right\} \quad (2.76)$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\Delta I_q}{\Delta I_q} \\ \overset{\Delta I_d}{\Delta I_d} \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \overset{R_e}{R_e} & -(\overset{X'_d}{X'_d} + \overset{X_e}{X_e}) \\ (\overset{X_q}{X_q} + \overset{X_e}{X_e}) & \overset{R_e}{R_e} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\Delta E'_q}{\Delta E'_q} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -|V_e| \sin(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \\ -|V_e| \cos(\delta_o - \alpha) \Delta\delta \end{bmatrix} \right\}$$

Donde:

$$k = (\overset{X_e}{X_e} + \overset{X_q}{X_q})(\overset{X'_d}{X'_d} + \overset{X_e}{X_e}) + \overset{R_e^2}{R_e^2}$$

Sustituyendo las ecuaciones de corriente, (2.76) en el par electromagnético se obtiene la expresión final:

$$\Delta T_e = I_{q0} \Delta E'_q + E'_{q0} - (X_q - X'_d) I_{d0} \left[\frac{R_e}{k} \Delta E'_q + \frac{R_e}{k} |V_e| \sin(\delta_0 - \alpha) \Delta \delta + \frac{1}{k} (X'_d + X_e) |V_e| \cos(\delta_0 - \alpha) \Delta \delta \right] - (X_q - X'_d) I_{q0} \left[\frac{-(X_q + X_e)}{k} \Delta E'_q + \frac{|V_e| R_e}{k} \cos(\delta_0 - \alpha) \Delta \delta - \frac{|V_e|}{k} (X_q + X_e) \sin(\delta_0 - \alpha) \Delta \delta \right]$$

Simplificando

$$\Delta T_e = \left\{ \frac{I_{q0}}{k} (R_e^2 + (X_e + X_q)^2) + \frac{R_e}{k} (E'_{q0} - (X_q - X'_d) I_{d0}) \right\} \Delta E'_q + \left\{ (E'_{q0} - (X_q - X'_d) I_{d0}) \left[\frac{R_e}{k} V_e \sin(\delta_0 - \alpha) + \frac{|V_e|}{k} (X'_d + X_e) \cos(\delta_0 - \alpha) \right] - (X_q - X'_d) I_{q0} \left[\frac{|V_e| R_e}{k} \cos(\delta_0 - \alpha) - \frac{|V_e|}{k} (X_q + X_e) \sin(\delta_0 - \alpha) \right] \right\} \Delta \delta$$

En forma compacta:

$$\Delta T_e = K_1 \Delta \delta + K_2 \Delta E'_q \quad (2.77)$$

Donde:

$$K_1 = (E'_{q0} - (X_q - X'_d) I_{d0}) \left[\frac{R_e}{k} V_e \sin(\delta_0 - \alpha) + \frac{|V_e|}{k} (X'_d + X_e) \cos(\delta_0 - \alpha) \right] - (X_q - X'_d) I_{q0} \left[\frac{|V_e| R_e}{k} \cos(\delta_0 - \alpha) - \frac{|V_e|}{k} (X_q + X_e) \sin(\delta_0 - \alpha) \right] \quad (2.78)$$

$$K_2 = \frac{I_{q0}}{k} (R_e^2 + (X_e + X_q)^2) + \frac{R_e}{k} (E'_{q0} - (X_q - X'_d) I_{d0})$$

2.5.4 Variación de los encadenamientos de flujo en eje d.

A partir de la ecuación (2.36):

$$\frac{d}{dt} E'_q = - \frac{1}{T'_{do}} [E'_q + E_{fd} - (X_d - X'_d) I_d] \quad (2.79)$$

Expresada en forma incremental:

$$\frac{d}{dt} \Delta E'_q = - \frac{1}{T'_{do}} [\Delta E'_q + \Delta E_{fd} - (X_d - X'_d) \Delta I_d] \quad (2.80)$$

Utilizando la expresión para ΔI_d , de la ecuación (2.76):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta E'_q &= \frac{1}{T'_{qo}} \Delta E'_q - \frac{1}{T'_{do}} \Delta E'_q + \frac{(X_d - X'_d)}{T'_{do} k} [- (X_q + X_e) \Delta E'_q] + \\ &\quad \frac{(X_d - X'_d)}{T'_{do} k} [- (X_q + X_e) |V_e| \sin(\delta_o - \alpha) \Delta \delta + \\ &\quad \frac{(X_d - X'_d)}{T'_{do} k} R_e |V_e| \cos(\delta_o - \alpha) \Delta \delta \\ T'_{do} \frac{d}{dt} \Delta E'_q &= \left[- \frac{(X_d - X'_d)(X_q + X_e)}{k} - 1 \right] \Delta E'_q + \frac{|V_e|}{k} \left[- (X_d - X'_d)(X_q + X_e) \sin(\delta_o - \alpha) \right. \\ &\quad \left. + (X_d - X'_d) R_e \cos(\delta_o - \alpha) \right] \Delta \delta - \Delta E_{fd} \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} T'_{do} s E'_{q(s)} + \left[1 + \frac{(X_d - X'_d)(X_q + X_e)}{k} \right] \Delta E'_{q(s)} &= \left[\frac{|V_e|}{k} - (X_d - X'_d)(X_q + X_e) \right. \\ &\quad \left. \sin(\delta_o - \alpha) + (X_d - X'_d) R_e \cos(\delta_o - \alpha) \right] \Delta \delta(s) - \Delta E_{fd}(s) \end{aligned}$$

Si se arregla la ecuación resulta:

$$(K_3 T'_{do} s + 1) E'_{q(s)} = \frac{|V_e|}{k} K_3 \left[- (X_d - X'_d)(X_q + X_e) \sin(\delta_o - \alpha) + (X_d - X'_d) \right.$$

$$R_e \cos(\delta_o - \alpha) \left] \Delta\delta(s) - K_3 \Delta E_{fd}(s) \right. \quad (2.81)$$

Donde:

$$K_3 = \frac{1}{\left[1 + \frac{(X_d - X'_d)(X_q + X_e)}{k} \right]} \quad (2.82)$$

De donde se obtiene la expresión final:

$$\Delta E'_q(s) = - \frac{K_3}{(1 + K_3 T'_{do})} \Delta E_{fd}(s) - \frac{K_3 K_4}{(1 + K_3 T'_{do} s)} \Delta\delta(s) \quad (2.83)$$

donde:

$$K_4 = \frac{|V_e|}{k} (X_d - X'_d) \left[(X_q + X_e) \sin(\delta_o - \alpha) - R_e \cos(\delta_o - \alpha) \right] \quad (2.84)$$

2.5.5 Voltaje Terminal

El voltaje terminal en función de las componentes d y q es el siguiente:

$$V_t^2 = V_d^2 + V_q^2$$

Considerando un cambio incremental;

$$(V_t - \Delta V_t)^2 = (V_d + \Delta V_d)^2 + (V_q + \Delta V_q)^2$$

$$V_t^2 + 2V_t \Delta V_t + \Delta V_t^2 = V_d^2 + 2V_d \Delta V_d + \Delta V_d^2 + V_q^2 + 2V_q \Delta V_q + \Delta V_q^2$$

Linealizando la expresión se tiene:

$$\Delta V_t = \left[\frac{V_{do}}{V_{to}} \right] \Delta V_d + \left[\frac{V_{qo}}{V_{to}} \right] \Delta V_q \quad (2.85)$$

Sustituyendo las expresiones para ΔV_d y ΔV_q en (2.85):

$$\Delta V_t = \left[\frac{V_{do}}{V_{to}} \right] (-X_q \Delta I_q) + \left[\frac{V_{qo}}{V_{to}} \right] (X'_d \Delta I_d + \Delta E'_q)$$

Y reemplazando ΔI_q y ΔI_d de la ecuación (2.76) resulta:

$$\begin{aligned} \Delta V_t = & \left[\begin{array}{cc} \frac{V_{do}}{V_{to}} & \frac{R_e}{k} X_q \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} V_{qo} \\ V_{to} \end{array} \right] \frac{(X'_d)(X_q + X_e)}{k} + \frac{V_{qo}}{V_{to}} \Delta E'_q \\ & + \left[\begin{array}{c} \frac{V_{do}}{V_{to}} \\ \frac{V_{do}}{V_{to}} \end{array} \right] (-X_q) \frac{R_e}{k} |V_e| \sin(\delta_o - \alpha) \Delta \delta + \left[\begin{array}{c} \frac{V_{do}}{V_{to}} \\ \frac{V_{do}}{V_{to}} \end{array} \right] (-X_q) \frac{(X'_d + X_e)}{k} |V_e| \\ & \cos(\delta_o - \alpha) - \left[\begin{array}{c} \frac{V_{qo}}{V_{to}} \\ \frac{V_{qo}}{V_{to}} \end{array} \right] (X'_d) \frac{(X_q + X_e)}{k} |V_e| \sin(\delta_o - \alpha) + \left[\begin{array}{c} \frac{V_{qo}}{V_{to}} \\ \frac{V_{qo}}{V_{to}} \end{array} \right] (X'_d) \frac{R_e}{k} |V_e| \\ & \left. \cos(\delta_o - \alpha) \right] \Delta \delta \end{aligned}$$

En forma compacta el cambio en el voltaje terminal se puede representar como:

$$\Delta V_t = K_5 \Delta \delta + K_6 \Delta E'_q \quad (2.86)$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_5 = & \left[\begin{array}{c} \frac{V_{do}}{V_{to}} \\ \frac{V_{do}}{V_{to}} \end{array} \right] \frac{X_q}{k} |V_e| \left[\begin{array}{c} R_e \sin(\delta_o - \alpha) + (X'_d + X_e) \cos(\delta_o - \alpha) \\ R_e \cos(\delta_o - \alpha) - (X_q + X_e) \sin(\delta_o - \alpha) \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{c} \frac{V_{qo}}{V_{to}} \\ \frac{V_{qo}}{V_{to}} \end{array} \right] \frac{(X'_d)}{k} |V_e| \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$K_6 = \left[\begin{array}{c} \frac{V_{qo}}{V_{to}} \\ \frac{V_{qo}}{V_{to}} \end{array} \right] \left[1 - \frac{(X'_d)(X_q + X_e)}{k} \right] - \left[\begin{array}{c} \frac{V_{do}}{V_{to}} \\ \frac{V_{do}}{V_{to}} \end{array} \right] \frac{R_e}{k} X_q \quad (2.88)$$

2.5.6 Resumen de Ecuaciones

Las ecuaciones del modelo linealizado son las siguientes:

Par eléctrico:

$$\Delta T_e = K_1 \Delta \delta + K_2 \Delta E'_q \quad (2.89)$$

Encadenamiento de flujo:

$$\Delta E'_q (s) = - \frac{K_3}{(1 + T'_{zo} s)} \Delta E_{fd} (s) - \frac{K_3 K_4}{(1 + T'_{zo} s)} \Delta \delta (s) \quad (2.90)$$

donde:

$$T'_{zo} = K_3 T'_{do}$$

Aplicando la transformada de Laplace y sustituyendo (2.90) en (2.89);

$$\Delta T_e(s) = K_1 \Delta \delta(s) - \frac{K_2 K_3}{(1 + T'_{zo} s)} \Delta E_{fd} (s) - \frac{K_2 K_3 K_4}{(1 + T'_{zo} s)} \Delta \delta(s)$$

En forma alterna:

$$\Delta T_e(s) = \left[K_1 - \frac{K_2 K_3 K_4}{(1 + T'_{zo} s)} \right] \Delta \delta(s) - \frac{K_2 K_3}{(1 + T'_{zo} s)} \Delta E_{fd} (s) \quad (2.91)$$

De la ecuación (2.86), al aplicar transformada de Laplace, se obtiene:

$$\Delta V_t (s) = K_5 \Delta \delta(s) + K_6 \Delta E'_q (s) \quad (2.92)$$

El voltaje terminal V_t y el voltaje interno E_{fd} se relacionan a través del sistema de excitación.

La **figura 2.4** muestra el diagrama a bloques que conforman las ecuaciones del modelo linealizado de la máquina.

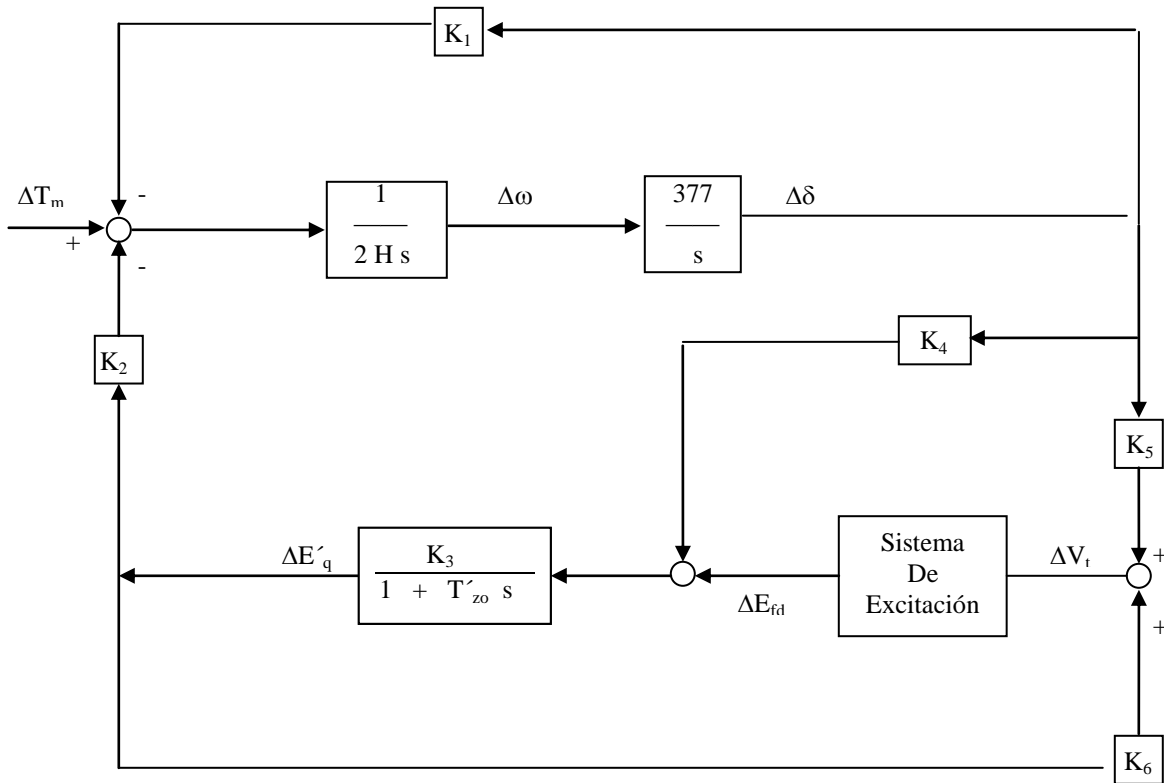


Figura 2.4. Diagrama de bloques del modelo linealizado.

2.6 CONSTANTES DE LA MÁQUINA

Se utilizan las ecuaciones de la sección 2.5 para calcular las constantes $K_1 - K_6$ de la máquina mostrada en la figura. 2.5.

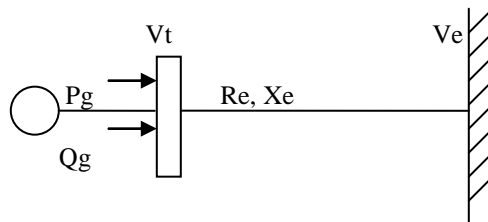


Figura 2.5 Sistema máquina – barra infinita

Los parámetros de la red y de la máquina, expresados en *Por Unidad* de la base del generador son los siguientes:

$$\begin{aligned} R_e &= 0.0 & R_a &= 0.0 & T'_{do} &= 6.0 \\ X_e &= 0.4 & X_d &= 1.6 & M &= 2 \text{ H} = 7 \text{ seg.} \\ X_q &= 1.55 & D &= 1 \end{aligned}$$

Las condiciones de voltaje y potencia generada son:

Barra infinita:

$$V_e = 1 \angle 0^\circ$$

Condición operativa:

$$P_g = 1.0 \text{ [p.u.]} \quad Q_g = 0.8 \text{ [p.u]}$$

El voltaje terminal se determina resolviendo la ecuación (2.93)

$$\begin{aligned} V_t &= V_e + Z_e I_t \\ V_t &= V_e + Z_e [(P + jQ) / V_t] \end{aligned} \tag{2.93}$$

Obteniendo
$$V_t = 1.2084 \angle 19.33^\circ$$

Se localiza el eje q utilizando (2.46)

$$\begin{aligned} E_q &= V_t + (R_a + j X_q) I_t \\ E_q &= 2.5765 \angle 49.1859^\circ \end{aligned} \tag{2.46}$$

Entonces:
$$\delta = 49.1859^\circ$$

La corriente terminal en la referencia del sistema es:

$$I_{ri} = [(P + jQ) / V_t]^* = 1.0597 \angle -19.33^\circ$$

En la referencia (q,d):

$$\begin{aligned} I_{qd} &= I_{ri} e^{(\cos \delta - j \sin \delta)} = 1.0597 \angle -68.5159^\circ \\ I_{qd} &= 0.3881 - j 0.9861 \end{aligned}$$

El voltaje terminal en la referencia (q,d):

$$V_{qd} = V_t e^{(\cos \delta - j \sin \delta)} = 1.2084 \angle -68.5159^\circ$$

$$V_{qd} = 1.0481 - j 0.6016$$

El voltaje interno transitorio en el eje q se obtiene de (2.47)

$$|E'_q| = \text{ABS} \{E_q\} + (X_q - X'_d) I_d \quad (2.47)$$

$$|E'_q| = 1.3636$$

Estos valores se substituyen en las ecuaciones (2.78), (2.82), (2.84) (2.87) y (2.88) para obtener las constantes K_1 a K_6 de la máquina, las que resultan:

$$\begin{array}{ll} K_1 = 1.3654 & K_4 = 1.3455 \\ K_2 = 1.0512 & K_5 = -0.0331 \\ K_3 = 0.36 & K_6 = 0.4818 \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.90), (2.91) y (2.92) se obtiene el modelo linealizado del generador:

$$\Delta E'_q(s) = \frac{0.36}{1 + 2.16 s} \Delta E_{fd}(s) - \frac{0.4844}{1 + 2.16 s} \Delta \delta(s)$$

$$\Delta T_e(s) = 1.3654 - \frac{0.509}{1 + 2.16 s} \Delta \delta(s) + \frac{0.3784}{1 + 2.16 s} \Delta E_{fd}(s)$$

$$\Delta V_t(s) = -0.0331 \Delta \delta(s) + 0.4818 \Delta E'_q(s)$$

En este ejemplo se tiene el valor puntual de los coeficientes $K_1 - K_6$.

Para determinar rangos de variación de estos parámetros se deben realizar una serie de cálculos que involucran una gran cantidad de condiciones de operación. En la Tabla 2.3 se muestran los valores máximos y mínimos que pueden alcanzar los coeficientes para una

variación de la potencia activa generada desde 0.2 a 1.0 [p.u] y una variación de potencia reactiva desde 0 a 0.8 [p.u].

Tabla 2.3 Rangos de variación de coeficientes

Coeficiente	Mínimo	Máximo
K ₁	0.6	1.8
K ₂	0.2	2.0
K ₄	0.2	2.5
K ₅	-0.2	0.1
K ₆	0.2	0.6

Se observa en la tabla 2.3 que todas las constantes varían en rangos de valores positivos, con excepción de K₅, la que puede alcanzar valores negativos.

Por otra parte, de (2.82) se observa que K₃ es un valor constante, que depende de los parámetros de la máquina y de la red a que esta se conecta.

$$K_3 = \frac{1}{1 + \frac{(X_d - X'_d)(X_q + X_e)}{k}}$$

Donde:

$$k = (K_e + X_q)(X'_d + X_e) + R_e^2$$

Dependiendo de la reactancia externa X_e, el valor de K₃ aumenta para mayores valores de X_e. Esto afecta el tiempo de respuesta total del generador (T'_{zo} = K₃ T'_{do}), por lo que una red débil (X_e grande) producirá una respuesta más lenta que una conexión robusta (X_e pequeña).