Capítulo 4

Modelo de Programación Lineal Entera para la Asignación de Rutas

Debido a la complejidad del problema de transportación que se aborda en esta tesis y que hemos denominado RoSLoP, se delimitó el alcance de su definición formal. En el modelo formulado mediante Programación Lineal Entera (ILP, Integer Linear Programing), sólo se consideró la tarea de asignación de rutas; sin embargo, la metodología de solución resuelve las tres actividades. Las condiciones dadas por la empresa de transportación estudiada hacen a RoSLoP más general que el problema clásico de enrutamiento de vehículos VRP.

Este capítulo inicia con una revisión de trabajos relacionados con la formulación de modelos ILP para el problema de enrutamiento de vehículos VRP. El análisis revela que los modelos previos no abordan todos los aspectos considerados en esta investigación. Finalmente se presentan los elementos que conforman al modelo matemático.

4.1 Trabajos Relacionados

En la presente sección se muestra el modelo matemático formulado para describir el problema de asignación de rutas BPVRP, el cual incluye siete variantes del problema clásico VRP. En la literatura revisada se identificaron numerosos modelos matemáticos que abordan a lo más cuatro variantes de VRP; dichos trabajos sólo describen subconjuntos de las variantes de VRP modeladas en este proyecto de investigación.

En la Tabla 4.1 se muestra el resumen de los trabajos de investigación que sirvieron de base para el modelo ILP de este proyecto. Entre ellos se encuentran: [Ralph, 2004], que describe un modelo matemático para el CVRP; [Hajri, 2003] que formula el problema VRP con múltiples ventanas de tiempo en el depósito y uso múltiple de vehículos, en forma implícita también se restringe la capacidad de los vehículos; [Feillet, 2002] que proporciona un modelo para el VRPTW con Particionamiento y Entrega (SDVRPTW); y [Dondo, 2003] que proporciona un modelo ILP del HVRP con múltiples almacenes, y restricciones de ventanas de tiempo y capacidad.

Tabla 4.1. Modelos Matemáticos de diferentes problemas VRP.

Autor	**Variantes que aborda**								
	CVRP	VRPTW	VRPMTW	HVRP	VRPM	MDVRP	SDVRP	sdVRP	CCVRP
[Feillet, 2002]	✔	✔					✔		
[Dondo, 2003]	✔								
[Hajri, 2003]	✔	✔		✔		✔			
[Ralph, 2004]	✔								
En este trabajo de Investigación[1]	✔	✔	✔	✔	✔		✔	✔	✔

Es importante mencionar que debido a la complejidad del problema, el modelo ILP solo describe tareas de asignación de rutas del problema RoSLoP. Para formular matemáticamente este problema es necesario definir un conjunto de constantes y variables que contienen los datos sobre los casos RoSLoP.

4.2 Agentes y Eventos

Con la finalidad de construir el modelo ILP fue necesario definir algunos conjuntos de elementos que permitieran describir los agentes y eventos del problema RoSLoP. En la Tabla 4.2 se muestran los conjuntos usados para definir BPVRP.

Tabla 4.2. Conjuntos del Modelo ILP de la tarea de Asignación de Rutas.

Símbolo	**Definición**
N	Conjunto de clientes
N_v	Clientes que debe ser abastecido por el almacén *v*, $N_v \in N \cup V$.
V	Conjunto de Almacenes. Debido a que algunos almacenes pueden ser clientes, hay un conjunto implícito que mantiene la relación de las localidades (almacenes y clientes) y se representa por $N \cup V$.
C	Flotilla de vehículos.
C_v	Subconjunto de vehículos que pertenece a un almacén *v*.
K	Conjunto máximo de rutas necesarias para satisfacer las demandas de los clientes con la flotilla disponible. La cardinalidad de este conjunto es igual a: $\sum_{v \in V} K_v$
K_v	Conjunto de rutas asignado a un almacén v que no podrá ser asignado a ningún otro almacén, $K_v \in K$
T	Conjunto de turnos u horarios de atención en los clientes.
T_m	Conjunto de horarios pertenecientes a un cliente m .
P_max_v	$\max(P_{mv})$, $\forall m \in N \cup V - v$, la demanda más grande que debe ser satisfecha por el almacén v .
C_min_v	$\{Capacidad_c \mid c \in c_v, \text{ y } \min(Capacidad_c)\}$, $\forall c \in C$, es la capacidad más pequeña de los camiones del almacén v .

Para calcular la cardinalidad máxima de cada subconjunto K_v se utiliza la ecuación (4.1).

$$|K_v| = |C_v| \cdot \left(\frac{P\_max_v}{C\_min_v} \right) \tag{4.1}$$

4.3 Parámetros y Variables

La Tabla 4.3 muestra la definición de parámetros necesarios para describir la tarea de asignación de rutas de un caso BPVRP.

Tabla 4.3. Definición de Parámetros.

Símbolo	**Definición**
P_{vm}	Pedido solicitado por el nodo *m* al almacén *v*, $\forall m \in N \cup V - v, v \in V$. El par mv existe si m es un cliente del almacén v .

$Capacidad_c$	Capacidad de carga del camión *c*, $\forall c \in C$.
MAX_{carga}	Carga máxima tomada de algún camión c cuya capacidad de carga $Capacidad_c$ supera al resto los camiones existentes $C - c$.
TT_{cim}	Tiempo de transporte para que el camión c viaje del nodo i al nodo m, $\forall c \in C_{v \in V}, i \in N \cup V, m \in N \cup V, i \neq m$.
TM_{cm}	Tiempo de maniobra para atender el vehículo c en el nodo m.
$RETORNO_{cm}$	Tiempo de retorno del camión c, que se encuentra en el nodo m, al almacén al que pertenece.
$Tiempo\_Servicio_c$	Tiempo de operación del camión c, después del cuál debe encontrarse en el almacén al que pertenece.
$Inicio\_TS\_Veh_c$	Inicio de la ventana de tiempo del vehículo *c* durante la cual el vehículo *c* puede prestar sus servicios para cubrir las demandas.
$Fin\_TS\_Veh_c$	Fin de la ventana de tiempo durante la cual el vehículo *c* puede prestar sus servicios para cubrir las demandas.
$Inicio\_TW\_Cliente_{tm}$	Inicio de las ventanas de tiempo *t* del cliente *m*.
$Fin\_TW\_Cliente_{tm}$	Fin de las ventanas de tiempo *t* del cliente *m*.
$ENTRADA_{ctm}$	Intersección de los inicios de las ventanas de tiempo de los clientes y vehículos: $Inicio\_TS\_Veh_c \cap Inicio\_TW\_Cliente_{tm}, \forall c \in C_{v \in V}, t \in T_m, m \in N_{v \in V}$
$SALIDA_{ctm}$	Hora de terminación del turno *t* en el nodo m para atender al camión *c*.
MAX_{tiempo}	Periodo de operación del sistema (horizonte de planeación).
$MaxVehicle_{tm}$	Número máximo de vehículos simultáneos que puede recibir el nodo m en el turno t.

La Tabla 4.4 muestra la definición de las variables de decisión usadas en el modelo ILP.

Tabla 4.4. Variables Binarias.

Variable	Descripción
$camion\_asignado_c$	Variable que toma el valor de 1 si el camión *c* fue empleado en una o más rutas para la satisfacción de demandas de clientes, y 0 en caso contrario.
X_{imk}	Variable de rutas que tomará el valor de 1 si la trayectoria *im* fue recorrida en la ruta *k*, y 0 en caso contrario.
nf_{hk}	Variable que tomará el valor de 1 si el nodo *h* en la ruta *k* fue el último nodo visitado, y 0 en caso contrario.
Y_{ck}	Variable que tomará el valor de 1 si el camión *c* fue asignado a la ruta *k*, y 0 en caso contrario.
M_{cmk}	Esta variable toma el valor 1 si el camión *c* realizó una operación de maniobra en *m* en la ruta *k*, y 0 en caso contrario.
T_{cijk}	Variable de transporte que toma el valor de 1 si el camión *c* hace un viaje de *i* a *j* en la ruta *k*, y 0 en caso contrario.

$turno_{ctmk}$	Variable que toma el valor de 1 si el camión *c* visitó en el turno *t* el nodo *m*, como parte de la ruta *k*, y 0 en caso contrario.
$Mismo_{kk'}$	Variable que indica si las rutas *k* y *k'* fueron asignadas a un mismo camión.
$Empalme_{cdtm}$	Variable de empalme que indica si los camiones *c* y *d* se empalman en tiempo en el nodo *m* durante el turno *t*.

La Tabla 4.5 muestra la definición de las variables enteras del modelo.

Tabla 4.5. Definición de variables enteras.

Símbolo	**Definición**
$Carga_{mk}$	Variable entera positiva que tomará el valor de la carga que haya sido transportada en la ruta *k* para ayudar a satisfacer la demanda del nodo *m*.
tt_{cmk}	Variable que toma el valor del tiempo de transporte y de maniobra requerido por el camión *c* para llegar a un nodo *m* desde el nodo anterior, en la ruta *k*.
$Llegada_{ctmk}$	Variable que tiene el tiempo de llegada para el camión *c* en la ruta *k* cuando visita al nodo *m* en el turno *t*.
$Salida_{ctmk}$	Variable que tiene el tiempo de salida para el camión *c* en la ruta *k* cuando visita al nodo *m* en el turno *t*.

4.4 Función Objetivo

El objetivo del Modelo ILP es minimizar el número de vehículos requeridos para satisfacer las demandas de todos los clientes. La función objetivo se muestra en la ecuación (4.2).

$$\textbf{min} \sum_{c \in C} camion\_asignado_c \qquad (4.2)$$

4.5 Restricciones

En esta sección se muestran las restricciones usadas para modelar la tarea de asignación de rutas del problema BPVRP.

Las ecuaciones (4.3, 4.4 y 4.5) presentan las restricciones necesarias para construir las rutas que cubrirán las demandas de los clientes, de acuerdo a las consideraciones especificadas en la definición del VRP estándar.

La ecuación (4.3) obliga a los clientes a ser visitados a lo más una vez en una ruta *k*. En otras palabras, esta restricción evita la formación de ciclos en el interior de una ruta.

$$\sum_{\substack{i \in N_{v \in V} \\ i \neq m}} X_{imk} \leq 1, \ \forall m \in N_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.3}$$

Con la ecuación (4.4) se presenta la restricción que obliga a una ruta a empezar en un almacén. Es decir, la restricción fuerza a la ruta *k* a iniciar en un almacén *v*, debido a que son los únicos que pueden satisfacer las demanda de los clientes.

$$\sum_{\substack{j \in N_{v \in V} \\ j \neq v}} X_{vjk} \leq 1, \ \forall v \in V, k \in K_{v \in V} \tag{4.4}$$

La ecuación 4.5 asegura que la trayectoria seguida en una ruta *k* sea contínua y no salte ciudades visitadas. Tambien ayuda a determinar la última ciudad visitada.

$$\sum_{\substack{i \in N_{v \in V} \\ i \neq h}} X_{ihk} - \sum_{\substack{j \in N_{v \in V} \\ h \neq j}} X_{hjk} - nf_{hk} = 0, \ \forall h \in N_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.5}$$

Las ecuaciones (4.6 y 4.7) se encargan de hacer cumplir la restricción del problema VRP básico donde se pide que la demanda de los clientes sea satisfecha por completo. De acuerdo a estas restricciones, la variable $Carga_{mk}$ puede contener un valor menor al pedido P_{vm} que un cliente *m* hace a un almacén *v*. Esta descripción formula la definición de la variante SDVRP, donde es posible que en un viaje a un cliente *m* no se satisfaga toda su demanda y por lo tanto requiera de más viajes para completarla. También se encuentra implícita la variante sdVRP en la variable P_{vm}, ya que cada cliente tiene una demanda específica a un almacén *v* y cada almacén *v* tiene una flotilla para cubrir sus pedidos, por lo cual el cliente *v* con demanda a *m* solo puede ser abastecido por los vehículos $c \in C_v$.

La ecuación (4.6) asegura que se satisfaga el pedido solicitado por el nodo m a un almacén v. En esta restricción solamente se toman en cuenta las rutas que estén asociadas al mismo depósito v sobre el cual se hizo el pedido P_{mv}. La variable $Carga_{mk}$ contiene la carga que se transporta en la ruta k al nodo m.

$$\sum_{k \in K_{v \in V}} \left(Carga_{mk} \right) - P_{vm} = 0, \; \forall m \in N_{v \in V}, v \in V \tag{4.6}$$

Con la ecuación (4.7) se asegura que la variable $Carga_{mk}$ tome un valor sólo si hubo un viaje al cliente m en la ruta k. Dicho de otra manera, esta restricción fuerza a la variable $Carga_{mk}$ a tomar valor sólo si existe un viaje al cliente m desde alguna ciudad i en la ruta k. Es importante hacer notar que los arcos im están íntimamente vinculados con los arcos que pueden ser alcanzados por la ruta k que depende del almacen v a la que se asocia.

$$MAX_{\text{carga}} \cdot \sum_{\substack{i \in N_{v \in V} \\ i \neq m}} X_{imk} - Carga_{mk} \geq 0, \; \forall k \in K_{v \in V}, m \in N_{v \in V} \tag{4.7}$$

Con las ecuaciones (4.8 y 4.9) se cumple la condición que da origen a la variante CVRP, que dice que los vehículos no deben exceder su capacidad de carga en la ruta a la que fueron asignados.

Debido a que una misma ruta no puede ser cubierta por mas de un camión, la restricción (4.8) fuerza que un solo camión $c \in C_v$ sea asignado a una ruta k.

$$\sum_{c \in C_{v \in V}} Y_{ck} \leq 1, \; \forall k \in K_{v \in V} \tag{4.8}$$

La ecuación (4.9) asegurará que el camión c que se asignó a la ruta k no exceda su capacidad de carga contabilizada en $Carga_{mk}$. Es decir, se encargará de que un vehículo no transporte más carga de la que puede llevar.

$$\sum_{c \in C_{v \in V}} \left(Capacidad_c \cdot Y_{ck} \right) - \sum_{m \in N_{v \in V}} Carga_{mk} \geq 0, \ \forall k \in K_{v \in V} \tag{4.9}$$

Las ecuaciones (4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 y 4.17) contribuyen a dar solución a la variante HVRP. Debido a que en esta variante los costos de maniobra y transporte dependen del tipo de vehículo, éstas ecuaciones ayudan a precisarlos de acuerdo al conjunto de camiones escogido por la ecuación (4.8).

La combinación de las ecuaciones (4.10) a (4.12) determinan los camiones que abastecieron a los clientes. En otras palabras, especifican si un camión c realizó una maniobra de carga o descarga en un cliente m visitado en una ruta k.

$$Y_{ck} - M_{cmk} \geq 0, \ \forall c \in C_v, m \in N_v, k \in K_{v \in V} \tag{4.10}$$

$$MAX_{\text{carga}} > MAX_{\text{carga}} \cdot M_{cmk} - Carga_{mk} \geq 0, \ \forall c \in C_{v \in V}, m \in N_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.11, 4.12}$$

Con las ecuaciones (4.13) y (4.14) se determina por qué camiones fueron visitados los clientes. Es decir, se encargará de asignar el valor de 1 a T_{ckij} si el recorrido ij de la ruta k fue asignado al camión c, y 0 en caso contrario.

$$-2 < 2 \cdot T_{cijk} - \left(X_{ijk} + Y_{ck} \right) \leq 0, \ \forall i \text{ y } j \in N_{v \in V}, c \in C_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.13, 4.14}$$

La mezcla de las ecuaciones (4.15) y (4.16) proporcionan los clientes, en cada ruta, desde los cuales los camiones deben efectuar su viaje de regreso al almacén para volver a cargarse de productos y continuar satisfaciendo otras rutas. Es decir, determina el cliente m en una ruta k desde el cual un camión c se va a regresar al almacén.

$$-2 < 2 \cdot nf_{cmk} - \left(nf_{mk} + Y_{ck} \right) \leq 0, \ \forall m \in N_{v \in V}, c \in C_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.15, 4.16}$$

Una vez que se tienen conocimiento de que camiones participan en la solución, que clientes satisfacen y por donde viajan, se procede a calcular el tiempo total consumido por vehículo de acuerdo a las rutas que le fueron asignadas. Esto es llevado a cabo a través de la ecuación (4.17) que realiza un conteo de los tiempos de transporte, maniobra y retorno a almacén, por cada visita a un cliente *m* en una ruta *k*.

$$tt_{cmk} = \sum_{i \in N_{v \in V}} \left(TT_{cim} \cdot T_{cimk} \right) + TM_{cm} \cdot M_{cmk} + RETORNO_{cm} \cdot nf_{cmk}, \quad \forall c \in C, m \in N_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.17}$$

La ecuación (4.18) formula la definición de la variante VRPM al permitir utilizar un vehículo tantas veces como su tiempo de servicio lo admita. Es decir, un camión $c \in C_v$ c puede ser asignado a tantas rutas $k \in k_v$ mientras no exceda el tiempo permitido.

$$\sum_{m \in N_{v \in V}} \sum_{k \in K_{v \in V}} tt_{cmk} \leq TIEMPO\_SERVICIO_c, \ \forall c \in C_{v \in V} \tag{4.18}$$

La combinación de las ecuaciones (4.19) y (4.20) determina si un camión fue usado en una ruta o no. Esta combinación da valor a la variable empleada en la función objetivo del modelo para alcanzar el objetivo del problema VRP: minimizar los vehículos.

$$K > K \cdot camion\_asignado_c - \sum_{k \in K_{v \in V}} \left(Y_{ck} \right) \geq 0, \ \forall c \in C_{v \in V} \tag{4.19, 4.20}$$

De las ecuaciones (4.21) a la (4.29) se definen las restricciones necesarias para manejar las variantes VRPTW y VRPMTW. En estas restricciones se forman los horarios de visita de los camiones a los clientes, de acuerdo a las ventanas de tiempo establecidas.

Las ecuaciones (4.21, 4.22) determinan, para un camión *c* que viaja desde un origen *i* a un destino *m*, las respectivas horas de salida y llegada.

$$\sum_{t \in T_m} \left(Llegada_{ctmk} \right) \geq \sum_{t \in T_m} \left(Salida_{ctik} \right) + TT_{cim} \cdot T_{cimk}, \quad \forall c \in C_{v \in V}, i \text{ y } m \in N_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.21}$$

$$Salida_{ctmk} \geq Llegada_{ctmk} + TM_{cm} \cdot M_{cmk}, \ \forall t \in T_m, c \in C_{v \in V}, m \in N_{v \in V}, k \in K_{v \in V} \tag{4.22}$$

Con las ecuaciones (4.23) y (4.24) se satisface la restricción de la variante VRPTW donde se pide que los vehículos abastezcan los clientes dentro de las ventanas de tiempo.

$$Llegada_{ctmk} \geq turno_{ctmk} \cdot ENTRADA_{ctm}\textbf{,}\ \forall t \in T_m, c \in C_{v\in V}, m \in N_{v\in V}, k \in K_{v\in V} \tag{4.23}$$

$$Llegada_{ctmk} + TM_{cm} \cdot M_{cmk} \leq turno_{ctmk} \cdot SALIDA_{ctm}\textbf{,} \quad \forall t \in T_m, c \in C_{v\in V}, m \in N_{v\in V}, k \in K_{v\in V} \tag{4.24}$$

Las ecuaciones (4.25) y (4.26) determinan si 2 rutas están asignadas a un mismo camión.

$$-2 < 2 \cdot Mismo_{kk'} - \left(Y_{ck} + Y_{ck'}\right) \leq 0\textbf{,} \quad \forall c \in C_{v\in V}, k \text{ y } k' \in K_{v\in V}, k < k' \tag{4.25, 4.26}$$

La ecuación (4.27) asegura que las trayectorias de un camión no se traslapen, es decir que un camión haga mas de un viaje al mismo tiempo.

$$MAX_{tiempo} \cdot \left(1 - Mismo_{kk'}\right) - \left(\sum_{t\in T_m}\left(Salida_{ctmk}\right) + RETORNO_{cm} \cdot nf_{cmk} - \sum_{t\in T_m}\left(Salida_{ctnk'}\right)\right) \geq 0\textbf{,} \quad \forall m \in N_{v\in V}, c \in C_{v\in V}, k \text{ y } k' \in K_{v\in V}, k < k' \tag{4.27}$$

La ecuaciones (4.28) y (4.29) aseguran que sólo un turno sea empleado para visitar un cliente m en una ruta k.

$$-2 < 2 \cdot \sum_{t\in T_m}\left(turno_{ctmk}\right) - \left(y_{ck} + \sum_{i} X_{imk}\right) \leq 0\textbf{,}\ \forall c \in C_{v\in V}, m \in N_{v\in V}, k \in K_{v\in V} \tag{4.28, 4.29}$$

El conjunto de ecuaciones (4.30, 4.31 y 4.32) da soporte a la nueva variante VRP propuesta en este trabajo de investigación, CCVRP.

Las restricciones (4.30) y (4.31) determinan si un vehículo c tuvo empalme con un vehículo d en el nodo m en el turno t.

$$MAX_{tiempo} > MAX_{tiempo} \cdot Empalme_{cdtm} - \left(Salida_{ctmk} - Llegada_{dtmk'}\right) \geq 0\textbf{,} \quad \forall c \text{ y } d \in C_{v\in V}, k \text{ y } k' \in K_{v\in V}, t \in T_m, m \in N_{v\in V}, k < k', c \neq d \tag{4.30, 4.31}$$

La restricción (4.32) asegura que el número de vehículos en un cliente no exceda el límite de atención permitido.

$$1+\sum_{\substack{d\in C_v\\ d\neq c}} Empalme_{cdtm} \leq MaxVehicle_{tm}, \ \forall c \in C_{v\in V}, t \in T_m, m \in N_{v\in V} \tag{4.32}$$